МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

О. Б. Васюнина, С. В. Самуйлова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Конспект лекций

Пенза
Издательство ПГУ
2012

УДК 519.21(075)
В20

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра «Математика»
ГОУВПО «Пензенская государственная технологическая академия»;
кандидат педагогических наук, профессор кафедры
«Теория и методика обучения математике»
ГОУВПО «Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского»
М. А. Гаврилова

Васюнина, О. Б.
В20 Элементы теории меры и интеграл Лебега: конспект лекций / О. Б. Васюнина, С. В. Самуйлова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – 51с.

Кратко сформулированы основные понятия теории множеств и простейшие свойства открытых и замкнутых множеств. Приведены свойства измеримых множеств и измеримых функций. Рассмотрены интегралы Лебега от ограниченной функции, от неотрицательной неограниченной функции, от неограниченной функции произвольного знака, а также классы Лебега $L^p(E)$.

Конспект лекций подготовлен на кафедре «Высшая и прикладная математика» для студентов специальности «Прикладная математика», он может быть использован студентами других физико-математических специальностей.

УДК 519.21(075)

Предисловие

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо к функциям, которые или строго непрерывны в рассматриваемой области, или множество точек их разрыва имеет равный нулю n-мерный объем. В ряде фундаментальных разделов современной математики этого понятия оказывается недостаточно. Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (или же вообще могут быть заданы на абстрактном множестве, так что для них понятие непрерывности просто не имеет смысла), римановская конструкция интеграла становится непригодной. Вместе с тем для таких функций имеется весьма совершенное и гибкое понятие интеграла, введенное Лебегом.

Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличие от интеграла Римана, при составлении лебеговской интегральной суммы точки группируются не по принципу их близости в области интегрирования, а по принципу близости значений функции в этих точках. Эта идея и позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

В настоящем пособии излагаются элементы теории интеграла Лебега. Предварительно в пособии рассматривается теория меры и измеримых функций, являющихся широким обобщением непрерывных функций. Все изложение ведется для случая одной переменной, но без всякого затруднения может быть перенесено на случай любого конечного числа переменных.

1. Открытые и замкнутые множества

1.1. Некоторые основные понятия теории множеств

Пусть E – произвольное множество точек бесконечной прямой $(-\infty; +\infty)$.

1. Дополнением множества E называется множество, обозначаемое символом CE, и равное совокупности всех точек бесконечной прямой, которые не принадлежат множеству E.

2. Разностью множеств A и B называется совокупность точек множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначается разность символом A\B.

3. Точка x называется внутренней точкой множества E, если найдется некоторая окрестность точки x (т.е. интервал, содержащий эту точку), целиком принадлежащая множеству E. Окрестность точки x обозначают символом V(x).

4. Точка x называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности V(x) найдется хотя бы одна точка, принадлежащая E, отличная от x. Множество предельных точек называют производным множеством множества E и обозначают E'.

5. Множество G называют открытым, если все точки его являются внутренними.

6. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

7. Объединением множеств A и B (обозначение $A \bigcup B$) называют множество, в которое входят точки, принадлежащие хотя бы одному из множеств A или B.

8. Замыкание множества E – это множество $\overline{E}$ такое, что $\overline{E} = E \bigcup E'$.

Пример: Множество B' = {0, 1, 1/2, 1/3, …, 1/n, …} замкнутое, предельной точкой которого является 0. При удалении предельной точки оно не становится открытым, то есть понятия замкнутости и открытости не являются взаимодополняющими.

9. Интервалом будем называть любое связное открытое множество точек бесконечной прямой ($a<x<b$; $a<x<\infty$; $-\infty<x<b$)

1.2. Простейшие свойства открытых и замкнутых множеств

1. Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.

Пусть x – произвольная точка, принадлежащая CF, следовательно $x \notin F$. Рассмотрим всевозможные окрестности точки x. Если среди них найдется окрестность V(x), целиком принадлежащая CF, то CF является открытым множеством. Предположим, что такой окрестности не существует. Тогда в любую окрестность V(x) попадает хотя бы одна точка множества F. Это означает, что x – предельная точка множества F. Множество F является замкнутым по условию, т.е. содержит все свои предельные точки. Следовательно, и $x \in F$. Таким образом, получено противоречие.

2. Если множество G открытое, то его дополнение CG замкнутое.

Пусть x – предельная точка множества CG. По определению любая окрестность V(x) в этом случае содержит точки множества CG. Отсюда следует, что не существует окрестности, целиком лежащей в G. Значит x не является внутренней точкой G, и, следовательно, $x \notin G$, так как G – открытое множество, и все его точки внутренние по определению. Это означает, что $x \in CG$, то есть CG – замкнутое множество.

3. Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством.

$G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup \ldots \bigcup G_n \bigcup \ldots$. Пусть $x \in G$, следовательно, $x \in G_i$ при некотором i. Так как G_i – открытое множество, то существует окрестность точки x такая, что $V(x) \in G_i$, и, следовательно, $V(x) \in G$.

4. Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

Пусть $G = G_1 \bigcap G_2 \bigcap G_3 \bigcap \ldots \bigcap G_n$. Если $x \in G$, то $x \in G_1, \ldots, x \in G_n$. Следовательно, существуют окрестности $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)$ такие, что $V_1(x) \in G_1$, $V_2(x) \in G_2, \ldots, V_n(x) \in G_n$. Так как число множеств конечно, то найдется окрестность V(x), которая входит в состав всех окрестностей $V_i(x)$. Следовательно, $V(x) \in G$, и множество G – открытое.

5. Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым.

Пусть F_i – замкнутые множества и $F = F_1 \bigcap F_2 \bigcap \ldots \bigcap F_n \bigcap \ldots$. Тогда CF_i – открытые множества и $CF = CF_1 \bigcup CF_2 \bigcup \ldots \bigcup CF_n \bigcup \ldots$, так как F – множество точек, которые входят во все множества F_i одновременно, следовательно CF – это множество точек, которые не вошли хотя бы в одно множество F_i. Объединение CF – открытых множеств есть открытое множество (по свойству 3), следовательно, его дополнение – замкнутое множество.

6. Сумма конечного числа замкнутых множеств является замкнутым.

Пусть F_i – замкнутые множества и $F = F_1 \bigcup F_2 \bigcup \ldots \bigcup F_n$. Тогда CF_i – открытые множества и $CF = CF_1 \bigcap CF_2 \bigcap \ldots \bigcap CF_n$. Множество CF открытое по свойству 4, следовательно, множество F – замкнутое по свойству 1.

7. Если множество F замкнуто, а множество G – открыто, то G\F открыто, а F\G – замкнуто.

Множество F\G состоит из таких точек x, что $x \in F$, но $x \notin G$, а значит $x \in CG$.

Тогда $F \setminus G = F \bigcap CG$, где F и CG – замкнутые множества.

Аналогично $G \setminus F = G \bigcap CF$, где G и CF – открытые множества. Отсюда по свойствам 4 и 5 следует, что G\F открыто, а F\G – замкнуто.

8. Любое открытое множество точек бесконечной прямой представляют собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Пусть множество G – открытое, $x \in G$, тогда существует окрестность V(x) такая, что $V(x) \in G$. Рассмотрим все окрестности V(x), содержащиеся в G. Пусть их объединение – множество I(x).

Покажем, что I(x) – интервал. Пусть a и b – соответственно точная нижняя и верхняя границы множества I(x). Пусть $y \in (a, b)$, $a < y < x$ (или $x < y < b$). Покажем, что $y \in I(x)$. Так как $a = \inf I(x)$, то для любого $y > a$ найдется значение $y' \in I(x)$, такое что $a < y' < y$. Из неравенства $y' < y < x$ следует, что y принадлежит той же окрестности, что и точка y', то есть $y \in I(x)$.

Покажем, что интервалы $I(x_1)$ и $I(x_2)$, построенные для двух разных точек x_1 и x_2 либо не имеют общих точек, либо совпадают. Если бы $I(x_1)$ и

$I(x_2)$ имели общую точку x, то оба интервала содержались бы в I(x), поэтому совпадали.

Построив для каждой точки x свой интервал I(x), мы отберем теперь интервалы, не содержащие общих точек. Каждый такой интервал содержит хотя бы одну рациональную точку. Поскольку множество всех рациональных точек счетно, число всех попарно непересекающихся интервалов тоже счетно. Сумма всех таких интервалов составляет множество G.

Следствие. Всякое замкнутое множество точек бесконечной прямой получается удалением из бесконечной прямой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

2. Измеримые множества

2.1. Внешняя мера множества и ее основные свойства

Пусть $\Delta=(a, b)$ – интервал, длина (или мера) которого известна и равна $|\Delta|=b-a>0$.

Определение. Покрытием $S=S(E)$ множества E назовем всякую конечную или счетную систему интервалов $\{\Delta_n\}$, сумма которых содержит множество E. Обозначим $\sigma(S)$ сумму длин всех интервалов $\{\Delta_n\}$, составляющих покрытие $S=S(E)$, то есть

$$\sigma(S)=\sum_n |\Delta_n| \le \infty$$

Определение. Внешней мерой множества E называется точная нижняя грань величины $\sigma(S)$ на множестве всех покрытий S(E) множества E, то есть

$$|E|^* = \inf_{s(E)} \sigma(S)$$

Рассмотрим основные свойства внешней меры.

1. Если $E_1 \subset E_2$, то $|E_1|^* \le |E_2|^*$.

Любое покрытие E_2 является одновременно покрытием E_1, поэтому мера E_2 не может быть меньше меры E_1.

2. Если $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, то $|E|^* \le \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*$.

Мера $|E_k|^*$ – точная нижняя грань $\sigma(S_k)$, где $S_k = S(E_k)$. Тогда по определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ и числа $|E_k|^* + \varepsilon/2^k$ найдется покрытие $S_к$ такое, что для $\sigma(S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_n^k|$ справедливо неравенство $\sigma(S_k) \le |E_k|^* + \varepsilon/2^k$.

Рассмотрим общее покрытие S, являющееся объединением покрытий $S_к$, состоящее из всех интервалов $\{\Delta_n^k\}$. Так как S – покрытие E, то $|E|^* \le \sigma(S)$, где

$$\sigma(S) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(S_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(|E_k|^* + \varepsilon/2^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^* + \varepsilon,$$

$$|E|^* \le \sigma(S) \le \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^* + \varepsilon.$$

Очевидно, что последнее неравенство будет выполняться при любых значениях $\varepsilon > 0$, только если выполняется условие $|E|^* \le \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*$.

3. Расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 будем называть точную нижнюю грань расстояний между двумя точками этих множеств $\rho(E_1, E_2)$, то если $\rho(E_1, E_2) > 0$, то $|E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

4. Для произвольного множества E и произвольного числа ε найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G|^* = |E|^* + \varepsilon$.

2.2. Измеримые множества и их свойства

Определение. Множество E называется измеримым, если для любого положительного ε найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G \setminus E|^* < \varepsilon$.

Внешнюю меру измеримого множества E назовем мерой и обозначать будем $|E|$.

Выясним основные свойства измеримых множеств.

1. Всякое открытое множество измеримо, причем мера его равна сумме длин составляющих его попарно не пересекающихся интервалов.

Для доказательства достаточно в определении измеримости взять G=E и заметить, что точная нижняя грань $\sigma(S)$ достигается на покрытии S, совпадающем с разбиением множества E на сумму попарно непересекающихся интервалов.

2. Сумма конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где множества E_k измеримы. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется открытое множество G_k такое, что $|G_k \setminus E_k|^* < \varepsilon/2^k$.

Если $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, то $E \subset G$ и $G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus E_k)$.

По свойствам 1 и 2 внешней меры

$$\left|G \setminus E\right|^* \le \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E_k\right|^* \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k \setminus E_k\right|^* < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = \varepsilon$$

Неравенство верно для любого ε>0, следовательно, множество E измеримо.

3. Всякое замкнутое множество измеримо.

Пусть F – замкнутое множество, притом ограниченное, то есть $|F|^* < \infty$. Тогда по свойству 3.4 внешней меры для любого ε>0 найдется открытое множество G такое, что $|G|^* \le |F|^* + \varepsilon$. Множество G\F – открытое, следовательно, представимо в виде суммы попарно непересекающихся интервалов Δ_n, то есть $C \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

Утверждение будет доказано, если мы установим, что $|C \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \le \varepsilon$.

Обозначим Δ_n^α интервал, расположенный в $\Delta_n = (a, b)$ и равный $\Delta_n^\alpha = (a+\alpha, b-\alpha)$, а $\overline{\Delta}_n^\alpha = [a+\alpha, b-\alpha]$ – его замыкание, где $0 < \alpha < (a-b)/2$.

Обозначим $E_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_n^\alpha$. Множества $\overline{\Delta}_n^\alpha$ не пересекаются, следовательно $\left|E_n^\alpha\right|^* = \sum_{k=1}^{n} \left|\overline{\Delta}_n^\alpha\right|$.

$F \bigcup E_n^\alpha$ – замкнутое множество, так как F и E_n^α – замкнутые множества. Множества F и E_n^α не имеют общих точек, поэтому $\left|F \bigcup E_n^\alpha\right|^* = |F|^* + \left|E_n^\alpha\right|^*$. Так как $F \bigcup E_n^\alpha \subset G$, то $\left|F \bigcup E_n^\alpha\right|^* \le |G|^* \le |F|^* + \varepsilon$.

Тогда $|F|^* + |E_n^\alpha|^* \le |G|^* \le |F|^* + \varepsilon$. Так как $|F|^* < \infty$, получим $|E_n^\alpha|^* \le \varepsilon$ для всех α и всех n. Если $\alpha \to 0$ и $n \to \infty$, то $|E_n^\alpha|^* = |G \setminus F|^*$. Тогда $|G \setminus F|^* \le \varepsilon$, что и требовалось доказать.

4. Если множество E измеримо, то его дополнение CE измеримо.

Пусть E измеримо, тогда для ε>0 найдется открытое множество G_n такое, что $|G_n \setminus E|^* < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = 1/n$, тогда $|G_n \setminus E|^* < 1/n$.

Так как для любых множеств E_1 и E_2 справедлива формула $E_2 \setminus E_1 = CE_1 \setminus CE_2$, то $G_n \setminus E = CE \setminus CG_n$. Учитывая, что $CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} CG_n \subset CE \setminus CG_n$ для любого номера n получим $CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} CG_n \subset G_n \setminus E$.

Обозначим $E_0 = CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} CG_n$. Тогда из вышеизложенного следует, что $E_0 \subset G_n \setminus E$. По свойству 1 внешней меры $|E_0|^* \le |G_n \setminus E|^* < 1/n$ при любых сколь угодно больших значениях n, следовательно $|E_0|^* = 0$. Таким образом $CE = E_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} CG_n \right)$, где E_0 – множество меры нуль, CG_n – замкнутые множества, следовательно, измеримые по свойству 3 измеримых множеств. Отсюда следует, что CE измеримо как сумма измеримых множеств, по свойству 2 измеримых множеств.

Следствие. Для того, чтобы множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось замкнутое множество F, содержащееся в E, такое, что внешняя мера разности E\F меньше ε.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть E измеримо, тогда измеримо CE, и для любого числа ε, $\varepsilon > 0$, найдется открытое множество G такое, что $|G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Так как $G \setminus CE = E \setminus CG$, то $|E \setminus CG|^* < \varepsilon$, то есть существует замкнутое множество CG, содержащееся в E такое, что внешняя мера их разности меньше ε.

Докажем достаточность. Пусть F – замкнутое множество и $|E \setminus F|^* < \varepsilon$. Из условия $E \setminus F = CF \setminus CE$ следует $|CF \setminus CE|^* < \varepsilon$, где CF – открытое множество. Отсюда по определению измеримого множества CE измеримо. Значит множество E тоже измеримо.

5. Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым.

Пусть E_n – измеримые множества, где n=1, 2, …, ∞. Тогда CE_n тоже измеримые. Так как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = C\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} CE_n\right]$, то по свойствам 2 и 3 измеримых множеств множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ измеримо.

6. Разность двух измеримых множеств является измеримой.

Это следует из тождества $A \setminus B = A \bigcap (CB)$ и свойств измеримых множеств.

7. **Основная теорема теории меры**. Мера суммы конечного или счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, причем множества E_n измеримы и попарно не пересекаются.

а) Предположим, что все множества E_n ограничены. Для случая, когда все E_n замкнуты и их число конечно доказываемая теорема следует из свойства 3 внешней меры.

Если же E_n – произвольные ограниченные попарно непересекающиеся множества, то в силу следствия из свойства 3 измеримых множеств для любого n и любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество F_n, содержащиеся в E_n такое, что $|E_n \setminus F_n| < \varepsilon/2^n$. Так как F_n ограничены, замкнуты и не пересекаются, то для любого конечного m справедливо равенство $\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|$.

С другой стороны $E_n = (E_n \setminus F_n) \bigcup F_n$, следовательно,

$|E_n| \le |E_n \setminus F_n| + |F_n| < \varepsilon/2^n + |F_n|$ и

$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \le \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon/2^n < \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon$.

Так как $\bigcup_{n=1}^{m} F_n \subset E$, то $\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| \le |E|$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{m} |E_n| \le |E| + \varepsilon$, для $\varepsilon > 0$. При $m \to \infty$ получим $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \le |E| + \varepsilon$. Так как ε – любое положительное число, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \le |E|.$$

С другой стороны из свойства 2 внешней меры следует, что $|E| \le \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$. Отсюда следует, что $|E| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.

б) Пусть множества E_n не являются ограниченными, тогда разобьем E_n на непересекающиеся ограниченные множества:

$$E_n^k = E_n \bigcap (k - 1 \le |x| < k).$$

Пересечение измеримых множеств есть измеримое множество. Из равенства $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n^k$ следует $|E|=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|E_n^k|=\sum_{n=1}^{\infty}|E_n|$. Что и требовалось доказать.

Определение: Назовем множество E множеством типа G_δ, если E представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств G_n и множеством типа F_σ, если E представимо в виде суммы счетного числа замкнутых множеств F_n.

8. Если множество измеримо, то найдутся множество E1 типа F_σ, содержащееся в множестве E и множество E2 типа G_δ, содержащее E, для которых $|E_1|=|E|=|E_2|$.

Доказательство.

Так как множество E измеримо, то по следствию из свойства 4 измеримых множеств для любого номера n найдутся открытое множество G_n, содержащее E, и замкнутое множество F_n, содержащееся в E, такие, что $|E-F_n|<1/n$, $|G_n\setminus E|<1/n$.

Положим $E_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, $E_2=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$. Так как для любого номера n

$$E\setminus E_1\subset E\setminus F_n,\ E_2\setminus E\subset G_n\setminus E,$$

то по свойству 1 внешней меры получим $|E\setminus E_1|<1/n$, $|E_2\setminus E|<1/n$. Так как n – произвольный номер, то $|E\setminus E_1|=0$, $|E_2\setminus E|=0$. Теорема доказана.

Замечания:

1. Мера любого интервала (a, b) равна b-a.

2. Мера любого открытого множества равна сумме длин интервалов, образующих это множество.

3. Мера множества, составленного из одной точки, равна нулю.

3. Измеримые функции

3.1. Понятие измеримой функции

Будем называть расширенной числовой прямой обычную числовую прямую $-\infty<x<+\infty$ с добавлением двух новых элементов: $-\infty$ и $+\infty$. Тогда арифметические операции распространим на расширенную ось по правилам:

$a+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)-a=-\infty$	$a\cdot(+\infty)=+\infty$ при $a>0$
$a+(-\infty)=-\infty$	$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$	$a\cdot(+\infty)=-\infty$ при $a<0$
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$	$(+\infty)-a=+\infty$
$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$0\cdot(+\infty)=0$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	$0\cdot(-\infty)=0$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$.

Будем рассматривать функции, определенные на измеримых множествах обычной числовой прямой, принимающие значения, принадлежащие расширенной числовой прямой. Пример такой функции:

$$f(x)=\begin{cases}-\infty \text{ при } x<-1,\\ 0 \text{ при } -1\le x\le 1,\\ +\infty \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Будем обозначать символом E[f удовлетворяет условию A] множество всех значений x, принадлежащих E, для которых функция f(x) удовлетворяет условию A.

Например, E[f=a] – это множество значений $x \in E$, при которых f(x)=a.

Определение. Функция, определяемая на измеримом множестве E, называется измеримой на этом множестве, если для любого вещественного числа a множество $E[f \geq a]$ измеримо.

Теорема 1. Для измеримости функции f(x) на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих множеств E[f>a], E[f<a] или $E[f \leq a]$ было измеримо при любом вещественном a.

Доказательство. Доказательство основывается на элементарных соотношениях (1) и (2), которые иллюстрируются соответственно рисунками 1 и 2.

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geq a + 1/n] \tag{1}$$

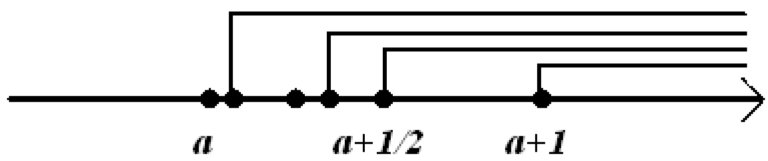

Рис. 1.

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a - 1/n] \tag{2}$$

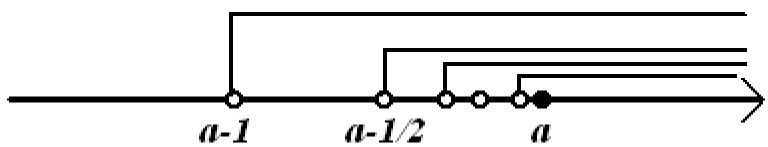

Рис. 2.

Необходимость.

Пусть функция f(x) измерима, тогда множество $E[f \geq a + 1/n]$ измеримо при любом n, следовательно, объединение множеств тоже измеримо, и значит множество $E[f > a]$ измеримо как объединение измеримых функций.

Достаточность. Пусть множество $E[f > a]$ измеримо при любом a, тогда измеримо и множество $E[f > a - 1/n]$. По свойству 5 измеримых множеств и из формулы 2 следует, что $E[f \geq a]$ измеримо, значит и функция f(x) измерима в соответствии с определением.

Таким образом измеримость множества $E[f > a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции f(x).

Из формул $E[f < a] = E \setminus E[f \geq a]$ и $E[f \leq a] = E \setminus E[f > a]$ по свойству 6 измеримых множеств следует измеримость множеств $E[f < a]$ и $E[f < a]$.

Таким образом, за определение измеримости функции можно принять измеримость любого из множеств E[f>a], E[f<a] и E[f≤a].

3.2. Свойства измеримых функций.

1. Если функция f(x) измерима на множестве E, то она измерима на любой измеримой части E_1 множества E.

Так как $E_1[f \geq a] \equiv E_1 \bigcap E[f \geq a]$, то по свойству 5 измеримых множеств множество $E_1[f \geq a]$ измеримо, значит функция измерима на множестве E_1.

2. Если множество E представляет собой конечную или счетную сумму измеримых множеств E_n, и если f(x) измерима на каждом множестве E_n, то f(x) измерима на множестве E.

Утверждение очевидно следует из соотношения $E[f \geq a] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n[f \geq a]$.

3. Любая функция f(x) измерима на множестве E меры нуль.

Так как $E[f \geq a] \subset E$, а E – множество меры нуль, то любое его подмножество также имеет меру нуль, то есть множество $E[f \geq a]$ имеет меру нуль, а значит измеримо. Следовательно, и функция f(x) измерима.

Определение: Две определенные на измеримом множестве E функции f(x) и g(x) называются эквивалентными на этом множестве ($f \approx g$), если множество $E[f \neq g]$ имеет меру нуль.

4. Если функции f(x) и g(x) эквивалентны на множестве E и функция f(x) измерима на E, то и функция g(x) измерима на E.

Пусть $E_0 = E[f \neq g]$ и $E_1 = E \setminus E_0$. Функция f(x) измерима на E, следовательно, и на E_1 по свойству 1 измеримых множеств. Так как g(x)=f(x) на E_1, то g(x) измерима на E_1. По свойству 3 измеримых функций g(x) измерима на E_0 и, кроме того, $E = E_1 \bigcup E_0$, тогда по свойству 2 измеримых функций g(x) измерима на E.

Определение. Будем говорить, что свойство А справедливо почти всюду на множестве E, если множество точек E, на котором это свойство несправедливо имеет меру нуль.

Следствие из свойства 4. Если функция f(x) непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то f(x) измерима на E.

3.3. Арифметические операции над измеримыми функциями

Лемма 1.

а) Если функция f(x) измерима на множестве E, то на этом множестве измеримы функции $|f(x)|$, $c \cdot f(x)$ и f(x)+c (где c – любая постоянная, $c \neq 0$).

б) Если f(x) и g(x) измеримы на множестве E, то множество E [f>g] измеримо.

Доказательство:

а) Так функция f(x) измерима по условию, то измеримыми являются множества $E[f(x)\geq \mathrm{const}]$ и $E[f(x)\leq \mathrm{const}]$.

Если a≥0, то $E[|f(x)|\geq a]=E[f(x)\geq a]\cup E[f(x)\leq -a]$. Множество $E[|f(x)|\geq a]$ измеримо как сумма измеримых множеств.

Если a< 0, то $E[|f(x)|\geq a]=E$, где E – измеримое множество по условию.

Функция c·f(x) измерима, так как

$$E[c\cdot f(x)\geq a]=\begin{cases} E\left[f(x)\geq \dfrac{a}{c}\right] & \text{при } c>0, \\ E\left[f(x)\leq \dfrac{a}{c}\right] & \text{при } c<0, \end{cases},$$

где множества $E\left[f(x)\geq \dfrac{a}{c}\right]$ и $E\left[f(x)\leq \dfrac{a}{c}\right]$ измеримы по условию.

Измеримость функции f(x)+c следует из равенства $E[f(x)+c\geq a]=E[f(x)\geq a-c]$.

б) Пусть $\{r_k\}$ все рациональные точки бесконечной прямой (-∞; +∞).

$$E[f(x)>g(x)]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E[f(x)>r_k]\cap E[g(x)<r_k]\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E[g(x)<r_k<f(x)].$$

Отсюда следует по свойствам измеримых функций и измеримых множеств, что множество $E[f(x)>g(x)]$ измеримо.

Теорема 2. Если функции f(x) и g(x) принимают на множестве E конечные значения и измеримы на этом множестве, то каждая из функций f(x)-g(x), f(x)+g(x), f(x)·g(x), f(x) /g(x) (g(x)≠0) измерима на множестве E.

Доказательство:

а) Докажем измеримость множества E[f(x)-g(x))≥a], где a – любое число.

$$E[(f(x)-g(x))>a] = E[f(x)>g(x)+a].$$

По лемме 1 (б) множество E[f(x)>g(x))+a] измеримо, так как измеримы функции f(x) и g(x)+a.

б) f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x)), функция -g(x) измерима по лемме 1 (а).

в) Докажем сначала измеримость квадрата измеримой функции f(x), то есть измеримость множества $E\left[f^2(x) > a\right]$.

Если a<0, то $E\left[f^2(x) > a\right] = E$, где E – измеримое множество.

Если a≥0, то $E[f^2(x) > a] = E[|f(x)| > \sqrt{a}]$, где множество $E[|f(x)| > \sqrt{a}]$ измеримо.

Произведение $f(x)\cdot g(x)$ измеримо, так как справедливо равенство $f(x)\cdot g(x) = \frac{1}{4}(f(x)+g(x))^2 - \frac{1}{4}(f(x)-g(x))^2$, где функции $(f(x)+g(x))^2$ и $(f(x)-g(x))^2$ измеримы на основании пунктов а и б настоящей теоремы.

г) $f(x)/g(x) = f(x)\cdot(1/g(x))$. Докажем измеримость функции 1/g(x).

$$E\left[1/g(x) > a\right] = \begin{cases} E\left[g(x) < 1/a\right] \cap E\left[g(x) > 0\right] \text{ при } a > 0, \\ E\left[g(x) > 0\right] \text{ при } a = 0, \\ E\left[g(x) > 0\right] \cup E\left[g(x) < 1/a\right] \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Все множества, входящие в правую часть данной формулы измеримы. Следовательно, измеримо и множество $E\left[1/g(x) > a\right]$.

Тогда по теореме 2 (доказательство в) функция $f(x)/g(x)$ измерима.

4. Интеграл Лебега

4.1. Интеграл Лебега от ограниченной функции

Назовем разбиением измеримого множества E всякое семейство конечного числа измеримых и попарно непересекающихся подмножеств E_1, $E_2, \ldots E_n$ множества E, составляющих в сумме множество E. Разбиение будем обозначать символом T,

$$T = \{E_k\}_{k=1}^{n} = \{E_k\}.$$

Рассмотрим на измеримом множестве E конечной меры произвольную ограниченную функцию f(x). Для произвольного разбиения T множества E обозначим символами $M_к$ и $m_к$ соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани функции f(x) на множестве $E_к$.

Верхней и нижней суммой разбиения T будем называть соответственно суммы $S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k|$ и $s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|$, $s_T \le S_T$

Для любой ограниченной на множестве E функции f(x) множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T ограничены. Поэтому существует точная нижняя грань множества $\{S_T\}$ и точная верхняя грань множества $\{s_T\}$. Будем называть их соответственно верхним интегралом Лебега и нижним интегралом Лебега и обозначать $\bar{I}$ и $\underline{I}$.

Определение. Ограниченная на множестве конечной меры E функция f(x) называется интегрируемой (по Лебегу) на этом множестве, если $\bar{I} = \underline{I}$, то есть верхний и нижний интегралы Лебега совпадают.

Число $\bar{I} = \underline{I}$ называют интегралом Лебега от функции f(x) по множеству E и обозначают

$$\int_E f(x)dx.$$

Рассмотрим некоторые свойства верхних и нижних сумм и верхних и нижних интегралов Лебега.

Разбиение $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ называют измельчением разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, если для любого значения i найдется значение k, такое, что $E_i^* \subset E_k$.

1. Если T^* является измельчением разбиения T, то $s_T \le s_{T^*}$, $S_{T^*} \le S_T$

Доказательство. Пусть T^* является измельчением разбиения T и пусть M_i^* – точная верхняя грань f(x) на множестве E_i^*, а M_k – точная верхняя грань f(x) на множестве E_k. По определению измельчения для каждого номера i найдется отвечающий ему номер k (k=1, 2, …, n) такой, что E_i^* содержится в E_k. Причем сумма множеств E_i^*, отвечающих одному и тому же номеру k равна E_k и для всех этих множеств $M_i^* \le M_k$. Из определения верхней суммы получим

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^m M_i^* \cdot |E_i^*| = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i\ (E_i^* \subset E_k)} M_i^* \cdot |E_i^*| \right] \le \sum_{k=1}^n M_k \cdot \left[\sum_{i\ (E_i^* \subset E_k)} |E_i^*| \right] = \sum_{k=1}^n M_k \cdot |E_k| = S_T$$

Утверждение для нижних сумм доказывается аналогично.

2. Для двух произвольных разбиений T_1 и T_2 справедливо неравенство $s_{T_1} \le S_{T_2}$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\overline{T}$ множества E такое, что оно включает в себя все возможные пересечения множеств, образующих разбиения T_1 и T_2. Будем называть $\overline{T}$ произведением разбиений T_1 и T_2.

Разбиение $\overline{T}$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2. Тогда $s_{T_1} \le s_{\overline{T}}$, $S_{\overline{T}} \le S_{T_2}$. Отсюда следует $s_{T_1} \le S_{T_2}$.

3. Верхний и нижний интегралы Лебега связаны соотношением $\underline{I} \le \overline{I}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное разбиение T_2. Для любого разбиения T_1 справедливо $s_{T_1} \le S_{T_2}$. Следовательно S_{T_2} – одна из верхних граней множества $\{S_{T_1}\}$ всех нижних сумм. Тогда точная верхняя грань удовлетворяет неравенству $\underline{I} \le S_{T_2}$.

Последнее неравенство справедливо для произвольного разбиения T_2, то есть для множества $\{S_{T_2}\}$ число $\underline{I}$ является одной из нижних граней. Так как точная верхняя грань множества больше или равна любой нижней грани множества, получим $\underline{I} \le \overline{I}$.

Следствие. Всякая функция, интегрируемая по Риману, является интегрируемой по Лебегу, причем интегралы Лебега и Римана от такой функции совпадают.

Доказательство. Пусть функция f(x) интегрируема на множестве E=[a, b] по Риману и, следовательно, ограниченна на этом промежутке. Пусть $\underline{I}_R$ и $\overline{I}_R$ –верхний и нижний интегралы Дарбу, тогда $\underline{I}_R \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{I}_R$, так как разбиения Дарбу являются подмножествами разбиения Лебега (один из вариантов). Если функция f(x) интегрируема по Риману, то $\underline{I}_R = \overline{I}_R$ и, следовательно, $\underline{I} = \overline{I}$.

4.2. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций.

Теорема. Каково бы ни было измеримое множество E конечной меры, всякая ограниченная и измеримая на множестве E функция f(x) интегрируема на этом множестве.

Доказательство. Построим специальное разбиение множества E, называемое лебеговским. Обозначим M и m точные грани функции f(x) на множестве E. Разобьем отрезок [m, M] с помощью точек $m = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = M$ на частичные сегменты $[y_{k-1}, y_k]$, где k=1, 2, …, n, и обозначим δ длину наибольшего из этих частичных сегментов, то есть $\delta = \max\limits_{k=1,2,...,n}(y_k - y_{k-1})$. Лебеговским разбиением множества E назовем разбиение $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, в котором $E_1 = E[y_0 \le f(x) \le y_1]$, …, $E_k = E[y_{k-1} \le f(x) \le y_k]$ при k=2, 3, …, n.

Пусть S_T и s_T соответственно верхняя и нижняя суммы, отвечающие лебеговскому разбиению T. Для любого номера k (k=1, 2, …, n) справедливо неравенство $y_{k-1} \le m_k \le M_k \le y_k$, где m_k и M_k точные грани функции f(x) на множестве E_k. Умножая последнее неравенство на число $|E_k|$ и суммируя по всем номерам k (k=1, 2, …, n) получим $\sum\limits_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k| \le s_T \le S_T \le \sum\limits_{k=1}^{n} y_k|E_k|$. Тогда $0 \le S_T - s_T \le \sum\limits_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) \cdot |E_K| \le \delta \cdot |E|$. Так как $s_T \le \underline{I} \le \bar{I} \le S_T$, то $0 \le \bar{I} - \underline{I} < \delta \cdot |E|$. Устремляя δ к нулю получим $\underline{I} = \bar{I}$.

Таким образом, функция f(x) интегрируема по Лебегу.

Рассмотрим свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

1. $\int\limits_E 1\,dx = |E|$

Для доказательства заметим, что так как f(x)≡1, верхняя и нижняя суммы любого разбиения T множества E равны $|E|$.

2. Если функция f(x) ограничена и интегрируема на множестве E конечной меры и α – любое вещественное число, то и функция $\alpha \cdot f(x)$ интегрируема на множестве E, причем

$$\int_E [\alpha \cdot f(x)]\, dx = \alpha \cdot \int_E f(x)\, dx .$$

Доказательство. Для произвольного разбиения $T=\{E_к\}$ множества E обозначим $S_т$ и $s_т$ – верхнюю и нижнюю суммы функции f(x), а $S_T^{(\alpha)}$ и $s_T^{(\alpha)}$ - верхнюю и нижнюю суммы Лебега функции $\alpha \cdot f(x)$

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot S_T & \text{при } \alpha \ge 0, \\ \alpha \cdot s_T & \text{при } \alpha < 0, \end{cases} \qquad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot s_T & \text{при } \alpha \ge 0, \\ \alpha \cdot S_T & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Обозначим $\bar{I}$, $\underline{I}$ – верхний и нижний интегралы Лебега функции f(x), а $\bar{I}^{(\alpha)}$ и $\underline{I}^{(\alpha)}$ - для функции $\alpha \cdot f(x)$, тогда

$$\bar{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \bar{I} & \text{при } \alpha \ge 0, \\ \alpha \cdot \underline{I} & \text{при } \alpha < 0, \end{cases} \quad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \underline{I} & \text{при } \alpha \ge 0, \\ \alpha \cdot \bar{I} & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Так как функция f(x) интегрируема, то $\bar{I} = \underline{I} = \int_E f(x)dx$. Отсюда следует, что.

$$\bar{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \cdot \bar{I} = \alpha \cdot \underline{I} = \alpha \cdot \int_E f(x)\, dx .$$

3. Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E, то и сумма $f_1(x) + f_2(x)$ интегрируема на множестве E, причем

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx .$$

Пусть $f(x)=f_1(x) + f_2(x)$ и $T=\{E_к\}$ – произвольное разбиение множества E. Обозначим M_k и m_k соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани f(x) на множестве $E_к$, $S_т$ и $s_т$ – нижнюю и верхнюю суммы Лебега разбиения T для функции f(x), а $\underline{I}$ и $\bar{I}$ - верхний и нижний интегралы Лебега для этой функции. Для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будем использовать те же обозначения, но только с индексами (1) и (2). Так как точная верхняя (точная нижняя) грань суммы не больше (не меньше) суммы точных верхних (точных нижних) граней слагаемых, получим

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \le m_k \le M_k \le M_k^{(1)} + M_k^{(2)}.$$

Тогда для любого разбиения T справедливо неравенство

$$s_т^{(1)} + s_т^{(2)} \le s_т \le S_т \le S_т^{(1)} + S_т^{(2)}$$

и, следовательно,

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \le \underline{I} \le \bar{I} \le \bar{I}^{(1)} + \bar{I}^{(2)}. \qquad (3)$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы, значит

$$\underline{I}^{(1)} = \bar{I}^{(1)} = \int_E f_1(x)dx \text{ и } \underline{I}^{(2)} = \bar{I}^{(2)} = \int_E f_2(x)dx.$$

Отсюда

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} = \bar{I}^{(1)} + \bar{I}^{(2)} = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx.$$

Тогда из формулы (3) следует

$$\underline{I} = \bar{I} = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx.$$

Следствие. Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E, и если α и β – произвольные вещественные числа, то функция $\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$ интегрируема на множестве E, причем

$$\int_E [\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)]dx = \alpha \cdot \int_E f_1(x)dx + \beta \cdot \int_E f_2(x)dx.$$

4. Если функция f(x) ограничена и интегрируема на каждом из непересекающихся множеств конечной меры E_1 и E_2, то f(x) интегрируема и на сумме E множеств E_1 и E_2, причем

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

(аддитивность интеграла).

Доказательство.

Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множеств E_1 и E_2 соответственно. Тогда $T = T_1 \bigcup T_2$ – разбиение множества $E = E_1 \bigcup E_2$. Если S_{T_1}, S_{T_2}, S_T – верхние суммы, а s_{T_1}, s_{T_2}, s_T – нижние суммы функции f(x), отвечающие разбиениям T_1, T_2 и T, то $S_T = S_{T_1} + S_{T_2}$ и $s_T = s_{T_1} + s_{T_2}$. Обозначим $\bar{I}^{(1)}$ и $\underline{I}^{(1)}$ – верхний и нижний интегралы функции f(x) на множестве E_1, $\bar{I}^{(2)}$ и $\underline{I}^{(2)}$ – на множестве E_2, а $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – на множестве E. Так как точная верхняя (точная нижняя) грань суммы не больше (не меньше) суммы точных верхних (точных нижних) граней слагаемых, получаем

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \le \underline{I} \le \bar{I} \le \bar{I}^{(1)} + \bar{I}^{(2)}.$$

Из интегрируемости функции f(x) на множествах E_1 и E_2 следует, что $\underline{I}^{(1)} = \bar{I}^{(1)} = \int_{E_1} f(x)dx$ и $\underline{I}^{(2)} = \bar{I}^{(2)} = \int_{E_2} f(x)dx$, поэтому $\underline{I} = \bar{I} = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$.

5. Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E и если всюду на этом множестве $f_1(x) \ge f_2(x)$, то

$$\int_E f_1(x)dx \ge \int_E f_2(x)dx.$$

Доказательство.

Очевидно, что функция $F(x)=f_1(x) - f_2(x)$ неотрицательна на множестве E. Тогда все нижние суммы функции F(x) тоже неотрицательны на этом множестве и $\underline{I} \geq 0$. Отсюда следует, что $\int_E F(x)dx = \int_E f_1(x)dx - \int_E f_2(x)dx \geq 0$.

4.3. Интеграл Лебега от неотрицательной неограниченной функции

Рассмотрим случай, когда измеримая функция f(x) не является ограниченной. Будем считать, что $f(x) \geq 0$ всюду на множестве конечной меры E.

Введем в рассмотрение функцию $(f)_N(x)$ следующим образом. Для любого N>0 будем считать, что

$$(f)_N(x) = \min\{N, f(x)\} \tag{4}$$

и

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)dx. \tag{5}$$

Например, если функция f(x) имеет график, изображенный на рисунке 3, то функции $(f)_N(x)$ при заданном значении n соответствует график, изображенный на рисунке 4.

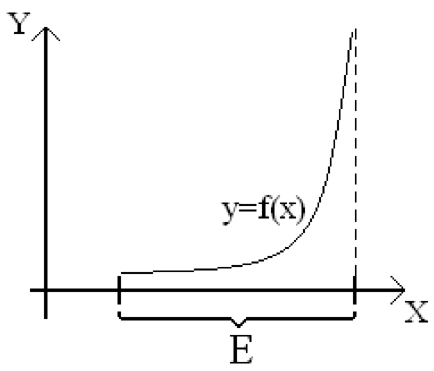

Рис. 3.

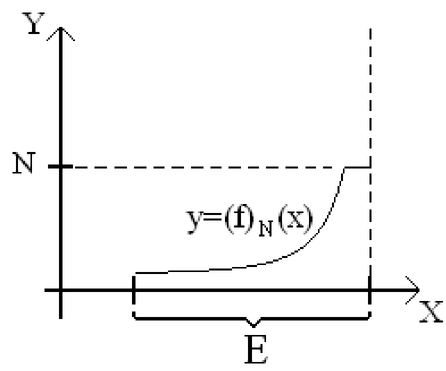

Рис. 4.

Функция $(f)_N(x)$ при этом является измеримой как и функция f(x) на множестве E. Действительно $E[(f)_N > a] = \begin{cases} E[f > a] \text{ при } a < N, \\ \text{пустое множество при } a \geq N. \end{cases}$

Функция $I_N(f)$ очевидно возрастает с увеличением N.

Определение. Если существует конечный предел функции $I_N(f)$ при $N \to \infty$, то функция f(x) называется суммируемой на множестве E (по Лебегу), а указанный предел называется интегралом от функции f(x) по множеству E и обозначается $\int\limits_E f(x)dx$, то есть

$$\lim_{N\to\infty} I_N(f) = \int\limits_E f(x)dx.$$

Рассмотрим свойства суммируемых функций.

1. Если неотрицательная на множестве E функция f(x) суммируема на этом множестве, то f(x) может обращаться в $+\infty$ только на подмножестве, имеющем меру нуль.

Доказательство.

Пусть $E_0 = E[f = +\infty]$, тогда по свойствам 4 и 5 интеграла Лебега от ограниченной функции

$$I_N(f) = \int\limits_E (f)_N(x)dx \geq \int\limits_{E_0} (f)_N(x)dx = \int\limits_{E_0} N\,dx = N \cdot |E_0|.$$

Но из неравенства $I_N(f) \geq N \cdot |E_0|$ следует, что если $|E_0| > 0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(f) = +\infty$, то есть функция не суммируема.

2. Всякая функция суммируема на множестве меры нуль.

3. Для суммируемых на множестве конечной меры E функций справедливы свойства, аналогичные свойствам 2-5 для ограниченных интегрируемых по Лебегу функций. В качестве примера докажем свойство 3. Из равенства (4) следует

$$(f_1)_{\frac{N}{2}}(x)+(f_2)_{\frac{N}{2}}(x)\le(f_1+f_2)_N(x)\le(f_1)_N(x)+(f_2)_N(x). \tag{6}$$

Для детального вывода неравенства (3) следует рассмотреть 4 случая:

$$\text{а) } f_1(x)<\frac{N}{2} \text{ и } f_2(x)<\frac{N}{2},$$

$$\text{б) } f_1(x)<\frac{N}{2} \text{ и } f_2(x)\ge\frac{N}{2},$$

$$\text{в) } f_1(x)\ge\frac{N}{2} \text{ и } f_2(x)<\frac{N}{2},$$

$$\text{г) } f_1(x)\ge\frac{N}{2} \text{ и } f_2(x)\ge\frac{N}{2}.$$

4. Свойство полной аддитивности.

Пусть $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, где $E_к$ – попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Если неотрицательная функция f(x) суммируема на множестве E, то f(x) суммируема и на каждом множестве $E_к$, причем

$$\int\limits_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_k} f(x)dx \tag{7}$$

б) Если неотрицательная на множестве E функция f(x) суммируема на каждом множестве $E_к$ и ряд в правой части формулы (7) сходится, то функция f(x) суммируема и на множестве E и для нее справедливо равенство (7).

Доказательство.

1) Сначала докажем теорему для ограниченной неотрицательной интегрируемой функции f(x). Итак, пусть функция f(x) ограничена всюду на E, то есть $f(x) \le M$. Введем обозначение $R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$. Тогда по основной теореме теории меры

$$|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k|, \text{ причем } |R_n| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx = \int_{R_n} f(x)dx \le M \cdot \int_{R_n} dx = M \cdot |R_n| \to 0$$

2) Рассмотрим теперь произвольную неотрицательную суммируемую функцию f(x).

Доказательство части а). Так как функция f(x) суммируема на множестве E, следовательно, существует предел вида

$$\lim_{N \to \infty} I_N(f) = \int_E f(x)dx,$$

где $I_N(f)$ вычисляется по формуле (5). Причем функция $I_N(f)$ неубывающая при N>0, следовательно, она ограничена своим пределом. То есть

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)dx \le \int_E f(x)dx. \tag{8}$$

Тогда из неравенства $\int_{E_k} (f)_N dx \le \int_E (f)_N(x)dx$ и неравенства (8) следует, что интеграл $\int_{E_k} (f)_N dx$ ограничен сверху, при этом он является неубывающей функцией при N>0 и, значит, имеет предел при $N \to \infty$.

Это означает, что функция f(x) суммируема на каждом из множеств E_k.

Докажем для случая неограниченной функции f(x) формулу (7).

Функция $(f)_N(x)$ является ограниченной и суммируемой на множестве E. В пункте 1 доказано, что для таких функций формула (7) справедлива, то есть

$$\int_E (f)_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (f)_N(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (9)$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ в формуле (9) получим

$$\int_E f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (10)$$

С другой стороны,

$$\int_E (f)_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (f)_N(x)dx \ge \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} (f)_N(x)dx. \qquad (11)$$

Переходя в формуле (11) к пределу сначала при $N\to\infty$, а затем при $m\to\infty$, получим

$$\int_E f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (12)$$

Сопоставляя неравенства (10) и (12) получаем

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Доказательство части б).

Так как по условию функция f(x) суммируема на множествах E_k, то из неравенства (10) и сходимости ряда в правой части этого неравенства следует суммируемость функции f(x) на множестве E.

5. Свойство абсолютной непрерывности интеграла от неограниченной неотрицательной функции.

Если функция f(x) неотрицательна и суммируема на множестве E, то для любого положительного числа ε найдется число $\delta>0$ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e|$, меньшей δ справедливо неравенство

$$\int_e f(x)dx < \varepsilon .$$

Доказательство.

1) Докажем свойство сначала для случая ограниченной функции f(x). Пусть f(x)≤M, тогда

$$\int_e f(x)dx \le M \cdot \int_e dx = M \cdot |e| < M \cdot \delta < \varepsilon \text{ при } \delta < \varepsilon / M .$$

2) Пусть функция f(x) неограниченна. Так как f(x) суммируема по условию, то на основании определения суммируемости для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ можно найти N=N(ε) такое, что

$$\int_E [f(x) - (f)_N(x)]dx < \varepsilon/2 .$$

Тогда, учитывая условие $(f)_N(x) \le N$, получим

$$\int_e f(x)dx = \int_e [f(x) - (f)_N(x)]dx + \int_e (f)_N(x)dx < \varepsilon/2 + N \cdot \int_e dx =$$

$$\varepsilon/2 + N \cdot |e| < \varepsilon/2 + N \cdot \delta < \varepsilon$$

при $\delta < \varepsilon/(2 \cdot N)$.

6. Если функция f(x) неотрицательна, измерима и суммируема на E и если $\int_E f(x)dx = 0$, то функция эквивалентна нулю на множестве E.

Доказательство.

Для доказательства покажем, что мера множества E[f>0] равна нулю.

Для этого сначала покажем, что $|E[f > a]| = |E_a| = 0$ для любого числа a>0. Действительно, если бы было иначе, то есть $|E_a| = |E[f > a]| > 0$, то было бы верно следующее неравенство

$$\int_E f(x)\,dx \ge \int_{E_a} f(x)\,dx \ge a\cdot|E_a| > 0,$$

что противоречит условию. Следовательно, $|E_a| = 0$.

Учитывая, что

$$E[f>0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[f>1/k], \text{ получим } |E[f>0]| \le \sum_{k=1}^{\infty} |E[f>1/k]| = 0$$

7. Мажорантный признак суммируемости неотрицательной суммируемой функции.

Если функция $f_1(x)$ неотрицательна и измерима на множестве E, а функция $f_2(x)$ суммируема на E и если всюду на E справедливо неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$, то функция $f_1(x)$ суммируема на множестве E.

Доказательство.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\int_E (f_1)_N(x)dx \le \int_E (f_2)_N(x)dx \le \int_E f_2(x)dx,$$

и учесть, что интеграл, стоящий в левой части последнего неравенства является неубывающей функцией от N.

4.4. Интеграл Лебега от неограниченной функции произвольного знака

Пусть функция f(x) не является ограниченной на множестве E и принимает на этом множестве значения любых знаков.

Пусть $f^+(x) = 1/2\cdot(|f(x)| + f(x))$ и $f^-(x) = 1/2\cdot(|f(x)| - f(x))$, причем очевидно, что $f^+(x) \ge 0$ и $f^-(x) \ge 0$.

Тогда $f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|$ и $f^+(x)-f^-(x)=f(x)$.

Определение. Функция f(x) называется суммируемой на множестве E, если на этом множестве суммируема каждая из неотрицательных функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$. При этом разность интегралов $\int\limits_E f^+(x)dx-\int\limits_E f^-(x)dx$ называется интегралом Лебега от функции f(x) по множеству E и обозначается $\int\limits_E f(x)dx$.

$$\int\limits_E f(x)dx=\int\limits_E f^+(x)dx-\int\limits_E f^-(x)dx. \qquad (13)$$

Вместо термина «суммируемая функция» можно использовать термин «интегрируемая функция».

Определение. Совокупность всех суммируемых на множестве E функций обычно обозначают символом $L(E)$ или $L^1(E)$. Запись $f(x)\in L(E)$ означает, что функция f(x) принадлежит классу (пространству) L(E), то есть является измеримой и суммируемой на множестве E.

Рассмотрим свойства произвольных суммируемых функций.

1. Измеримая на множестве E функция f(x) суммируема на множестве E тогда и только тогда, когда суммируема на множестве E функция $|f(x)|$.

Доказательство.

Если функция f(x) суммируема, то по определению суммируема каждая из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$. Это означает, что функция $f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|$ суммируема на множестве E.

И наоборот, если на множестве Е суммируема функция $|f(x)|$, то из измеримости на множестве Е каждой из функций $f^+(x)+f^-(x)$ и из неравенств $f^+(x)\le|f(x)|$ и $f^-(x)\le|f(x)|$ в силу мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции следует, что $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируемы, то есть функция f(x) суммируема на множестве Е.

2. Для произвольных суммируемых функций справедливы свойства 2-5, установленные для ограниченных интегрируемых функций и неотрицательных суммируемых функций. Справедливость указанных свойств сразу вытекает из формулы (13).

3. Свойство полной аддитивности.

Пусть множество определяется формулой $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, где $E_к$ – попарно непересекающиеся измеримые множества.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Если функция f(x) суммируема на множестве Е, то f(x) суммируема на каждом множестве $E_к$ и справедлива формула (7).

б) Если функция f(x) измерима и суммируема на каждом множестве $E_к$ и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx$, то функция f(x) суммируема на множестве Е и справедливо равенство (7).

Для доказательства части а) достаточно применить свойство полной аддитивности неотрицательных неограниченных суммируемых функций к функциям $f^+(x)$ и $f^-(x)$ и воспользоваться формулой (13).

Для доказательства части б) достаточно учесть, что в силу свойства полной аддитивности для неотрицательных неограниченных функций функция $|f(x)|$ суммируема на множестве E. Но тогда и функция f(x) суммируема на множестве E в силу свойства 1 из данного раздела.

4. Свойство абсолютной непрерывности интеграла.

Если функция f(x) суммируема на множестве E и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Для доказательства достаточно применить аналогичную теорему для неотрицательных неограниченных функций к функции $|f(x)|$ и воспользоваться неравенством $\left|\int_e f(x)dx\right| \le \int_e |f(x)|dx$.

4.5. Последовательности измеримых функций.

Определение 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся к функции f(x) почти всюду на измеримом множестве E, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

для всех $x \in E$, кроме множества точек, имеющих меру нуль.

Определение 2. Пусть функции $f_n(x)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ по мере на множестве E, если для любого положительного числа ε

$$\lim_{n\to\infty}\left|E\left[\left|f(x)-f_n(x)\right|\geq\varepsilon\right]\right|=0,$$

то есть для любых положительных ε и δ найдется номер N такой, что при n≥N справедливо неравенство

$$\left|E\left[\left|f(x)-f_n(x)\right|\geq\varepsilon\right]\right|\leq\delta.$$

Пример. Покажем, что последовательность $\{x^n\}$, сходится на отрезке [0,1] почти всюду к функции f(x)≡0 и сходится по мере к той же функции.

1. Покажем, что последовательность сходится почти всюду к функции f(x)≡0 на отрезке [0,1].

Зададим число ε>0. Определим, при каких значениях n справедливо неравенство $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$, то есть $\left|x^n\right|<\varepsilon$, и, следовательно $x^n<\varepsilon$, где $x\in[0,1]$.

Пусть x≠0. Прологарифмируем неравенство $x^n<\varepsilon$ по основанию e:

$$n\cdot\ln x<\ln\varepsilon.$$

Тогда если $\varepsilon>1$, то при любых значениях n неравенство верно.

Если $0<\varepsilon<1$ и $x\neq1$, то неравенство верно при всех n, удовлетворяющих условию $n>\ln\varepsilon/\ln x$.

Рассмотрим значение x=0. Очевидно, что неравенство $0^n<\varepsilon$ верно при любых значениях $\varepsilon>0$.

При x=1 не для любого ε>0 выполняется неравенство $x^n<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ при всех значениях $x\in[0,1)$, то есть почти всюду.

2. Докажем сходимость по мере. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|E\left[x^n\geq\varepsilon\right]\right|=0$ при любых значениях $\varepsilon>0$.

Если $\varepsilon \geq 1$, то $\left|E\left[x^n \geq \varepsilon\right]\right| = 0$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\left|E\left[x^n \geq \varepsilon\right]\right| = 0$.

Если $0 < \varepsilon < 1$, то из условия $x^n \geq \varepsilon$ следует, что $x > \sqrt[n]{\varepsilon}$ и учитывая, что $x\in[0,1]$ получим $\left|E\left[x^n \geq \varepsilon\right]\right| = 1 - \sqrt[n]{\varepsilon}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|E\left[x^n \geq \varepsilon\right]\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt[n]{\varepsilon}\right) = 0$.

Таким образом последовательность $\{x^n\}$ сходится к функции $f(x)\equiv 0$ по мере на множестве [0,1].

Приведем свойства сходящихся последовательностей.

1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на множестве E функций сходятся почти всюду на E к функции f(x), то f(x) измерима на E.

2. Пусть E – измеримое множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$ и f(x) измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции f(x) почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ к f(x) по мере на множестве E.

3. Пусть E – измеримое множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$ и f(x) измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) по мере на множестве E, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f(x) почти всюду.

4.6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Определение. Будем говорить, что последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$ сходится к суммируемой функции f(x) в L(E), если

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|dx = 0. \qquad (14)$$

Замечание. Из формулы (14) следует, что $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.

Рассмотрим свойства сходящихся в L(E) последовательностей.

1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) в L(E), то $\{f_n(x)\}$ сходится к f(x) по мере на множестве E.

Доказательство.

Выберем число $\varepsilon > 0$. Пусть $E_n = E[|f_n(x)-f(x)| > \varepsilon]$, тогда

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|dx \geq \int_{E_n} |f_n(x)-f(x)|dx \geq \varepsilon \cdot |E_n|.$$

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) в L(E), то есть $\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|dx = 0$, то $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) по мере на множестве E.

2. **Теорема Лебега.** Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на множестве E функций сходится к измеримой на том же множестве функции f(x) по мере, и существует суммируемая на E функция F(x) такая, что для всех n и почти всех точек $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x)| \leq F(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к f(x) в L(E).

Доказательство.

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) по мере на множестве E, то по свойству 3 сходящихся последовательностей из нее можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к f(x) почти всюду.

Так как $|f_n(x)| \le F(x)$ при любом значении n, следовательно, $|f_{n_k}(x)| \le F(x)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n_k \to \infty$ получим $|f(x)| \le F(x)$ почти для всех точек множества E.

Так как функция F(x) суммируема по условию, то из мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции следует, что и функция f(x) суммируема на множестве E.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $E_n = E[|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon]$, тогда

$$\int_E |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{E_n} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\le 2\cdot|f(x)| \le 2\cdot F(x)} dx + \int_{E \setminus E_n} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\le \varepsilon} dx \le$$

$$\le 2\int_{E_n} F(x)dx + \varepsilon \underbrace{|E \setminus E_n|}_{\le |E|} \le 2\int_{E_n} F(x)dx + \varepsilon|E|.$$

Так как полученное выше неравенство должно быть справедливо при любых значениях $\varepsilon > 0$, то

$$\int_E |f_n(x) - f(x)| dx \le 2\int_{E_n} F(x)dx,$$

отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \le 2\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} F(x)dx. \qquad (15)$$

Функция F(x) суммируема на множестве E. Тогда из свойства абсолютной непрерывности суммируемых функций следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого подмножества E_n множества E, удовлетворяющего условию

$$|E_n| < \delta, \tag{16}$$

справедливо неравенство

$$\left| \int_{E_n} F(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

Так как по условию последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) на множестве E по мере, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \left| E\left[|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon \right] \right| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n| = 0$. Отсюда следует, что если неравенства (16) и (17) выполняются для некоторого номера N, то они выполняются и для всех номеров n>N. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} F(x)dx = 0$. Тогда из неравенства (15) следует

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

то есть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции f(x) в L(E).

3. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на множестве E функций сходится почти всюду на E к функции f(x), и если существует суммируемая на множестве E функция F(x) такая, что для всех номеров n и почти всех точек $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x)| \leq F(x)$, то функция f(x) суммируема на множестве E и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx. \tag{18}$$

Доказательство.

Из свойства 1 сходящихся последовательностей следует, что функция f(x) измерима на множестве E. Учитывая, что из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ почти всюду на E вытекает сходимость по мере, то согласно предыдущему свойству (свойству 2) утверждение справедливо.

4. **Теорема Леви**. Пусть каждая функция $f_n(x)$ измерима и суммируема на множестве E, и пусть для всех номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. Пусть существует постоянное M такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\left|\int_E f_n(x)dx\right| \le M$. Тогда почти для всех точек x из множества E существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем предельная функция f(x) суммируема на множестве E и справедливо равенство (18).

Доказательство.

Будем считать, что все функции $f_n(x)$ неотрицательны почти всюду на множестве E. Заметим, что это условие не ограничивает общности, так как, если бы оно не выполнялось, то следовало бы взять вместо функций $f_n(x)$ неотрицательные функции $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$.

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает почти всюду на множестве E, то почти всюду на E определена предельная функция f(x), которая принимает конечные значения или равна $+\infty$. Докажем, что эта функция f(x) суммируема на множестве E.

Рассмотрим последовательность $\{(f_n)_N(x)\}$. Она сходится почти всюду на множестве E к функции $(f)_N(x)$. Причем ограниченная функция $(f)_N(x)$ суммируема на множестве E, и для всех номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $(f_n)_N(x) \le (f)_N(x)$. Тогда к последовательности $\{(f_n)_N(x)\}$ можно применить предыдущее свойство (свойство 3), в силу которого $\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n)_N(x)dx = \int_E (f)_N(x)dx$. Отсюда, с учетом неравенства $\int\limits_E f_n(x)dx \ge \int\limits_E (f_n)_N(x)dx$ получим $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx \ge \int\limits_E (f)_N(x)dx$.

Поскольку $\int\limits_E f_n(x)dx \le M$ для всех номеров n, то $\int\limits_E (f)_N(x)dx \le M$. Так как интеграл в левой части последнего неравенства является неубывающей функцией по N, то существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_E (f)_N(x)dx$, то есть функция f(x) суммируема на множестве E.

Из суммируемости функции f(x) следует, что она может быть равна $+\infty$ только на множестве меры нуль. Значит она принимает конечные значения почти всюду на множестве E, и почти всюду на множестве E существует <u>конечный</u> предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Учитывая, что $f_n(x) \le f(x)$ почти всюду на E, в силу рассмотренного выше свойства 3, получим равенство (18).

Замечание. Рассмотренную выше теорему можно сформулировать в терминах функционального ряда.

Если каждая функция $u_n(x)$ неотрицательна почти всюду на множестве E, измерима и суммируема на этом множестве, и если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_E u_n(x)dx$, то почти всюду на E сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$, причем сумма S(x) этого ряда суммируема на множестве E и удовлетворяет условию $\int\limits_E S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_E u_n(x)dx$.

5. **Теорема Фату**. Если последовательность измеримых и суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции f(x), и если существует постоянная A такая, что для нее

справедливо неравенство $\int_E |f_n(x)| dx \le A$, то предельная функция f(x) суммируема на множестве E, и для нее справедливо неравенство $\int_E |f(x)| dx \le A$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $g_n(x) = \inf_{k \ge n} |f_k(x)|^*$, которая является неотрицательной и измеримой на множестве E. При этом последовательность $\{g_n(x)\}$ не убывает на множестве E, почти для всех точек множества E сходится к функции $|f(x)|$, и справедливо неравенство $g_n(x) \le |f_n(x)|$. Тогда из мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции вытекает суммируемость $g_n(x)$ на множестве E. Применяя свойство 4 данного раздела получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x) dx = \int_E |f(x)| dx. \tag{19}$$

Учитывая, что $\int_E g_n(x) dx \le \int_E |f(x)| dx \le A$, из формулы (19) получим $\int_E |f(x)| dx \le A$.

4.7. Классы Лебега $L^p(E)$

Определение. Будем говорить, что функция f(x) принадлежит классу (или пространству) $L^p(E)$, если она измерима на множестве E, а функция $|f(x)|^p$ суммируема на этом множестве.

Легко убедиться, что при любом $p \geq 1$ класс $L^p(E)$ является линейным нормированным пространством, если в нем ввести норму с помощью соотношения $\|f(x)\|_{L^p(E)} = \|f(x)\|_p = \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R называется фундаментальной, если $\lim\limits_{\substack{m \geq n \\ n \to \infty}} \|f_m - f_n\|_R = 0$.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R сходится в R к элементу этого пространства f, если $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_R = 0$.

Такого рода сходимость называют еще сходимостью по норме или сильной сходимостью в R.

Легко доказать, что всякая сходящаяся в R последовательность элементов $\{f_n\}$ является фундаментальной.

Определение. Линейное нормированное пространство R называется полным, если всякая фундаментальная последовательность элементов $\{f_n\}$ пространства R сходится в R к элементу f этого пространства.

Теорема. При любом $p \geq 1$ пространство $L^p(E)$ является полным.

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ – произвольная фундаментальная последовательность элементов пространства $L^p(E)$, и пусть $\varepsilon_n = \sup\limits_{m \geq n} \|f_m - f_n\|$. Из условия фундаментальности последовательности $\{f_n(x)\}$ вытекает, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что можно выбрать подпоследовательность номеров n_k такую, что будет сходиться ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} . \qquad (20)$$

Так как для любых двух интегрируемых на множестве E функций f(x) и g(x) и любых двух чисел p и q таких, что p>1, а q=p/(p-1), справедливо неравенство Гельдера

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)| dx \le \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

то

$$\int_E \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| dx \le \left\| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right\|_p \cdot \left(\int_E 1^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \varepsilon_{n_k} \cdot |E|^{(p-1)/p} .$$

Из последнего неравенства и из сходимости ряда (20) вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|$ и, следовательно, сходимость ряда

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right].$$

Это означает, что k-я частичная сумма указанного ряда, равная $f_{n_{k+1}}(x)$, сходится почти всюду на E к некоторой функции f(x). Поскольку $\left\| f_m(x) - f_{n_k}(x) \right\|_p \le \varepsilon_m$ при любом номере m и любом $n_k \ge m$, а также $\left[f_m(x) - f_{n_k}(x) \right] \to \left[f_m(x) - f(x) \right]$ при $k \to \infty$ почти всюду на E, то по теореме Фату $\left\| f_m(x) - f(x) \right\|_p \le \varepsilon_m$ при любом номере m. Отсюда следует, что последовательность $\{f_m(x)\}$ сходится в $L^p(E)$ к функции f(x).

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. М.: Физматлит. Ч.2 - 2002, 4-е изд., 464с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - изд. 4, переработанное. - М.: Наука, 1976. - 544 с.

3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Учеб. пособие. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 480с.

4. Треногин В. А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 495 с.

5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. - 2-е.- М.: Физматлит, 1961. - 436 с.

Содержание